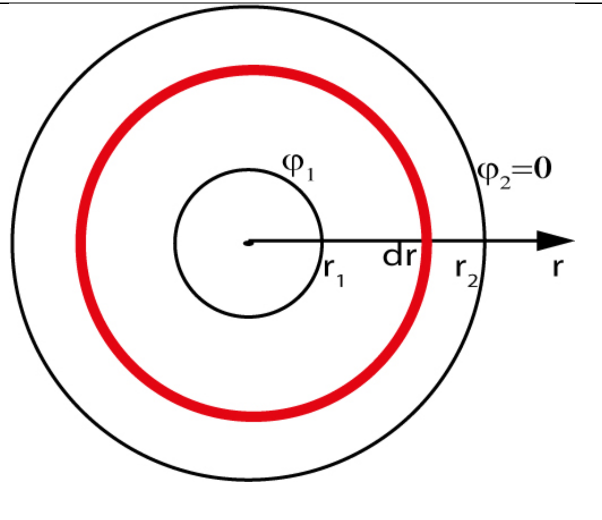
Herleitung des Potentials bei zylindrisch divergierenden Strömen




Der Aufbau ist radialsymmetrisch. Im Inneren sitzt eine Metallzylinder dessen Außenradius $r_1$ ist. Dieser habe durch ein Netzgerät versorgt das Potential $\varphi_1 > 0$. Der Außenradius des mit Flüssigkeit und Sand gefüllten Zylinders sei $r_2$. Dieser ist mit dem anderen Pol des Netzgerätes verbunden und geerdet und habe deshalb das Potential $\varphi_1=0$. Die spezifische Leitfähigkeit des feuchten Sandes sei homogen. Der Zylinder habe die Höhe h. Insgesamt fließt Landung radial nach außen. Die Stärke des Stroms durch jeden gedachten konzentrischen Zylindermantel ist $I_{ges}$.

1) $I_{ges} = \frac{\varphi_1-\varphi_2}{R_{ges}} = \frac{\varphi_1}{R_{ges}}$

Betrachten wir nun einen Hohlzylinder der Dicke *dr*. Dieser habe den Widerstand *d*R.

Der Widerstand *d*R ergibt sich aus dem spezifischen Widerstand $R_{spez}$, der Mantelfäche des Zylinders $2\pi rh$ und der Wandstärke *dr* zu

2) $dR = \frac{R_{spez}}{2\pi rh} dr$

Ansatz über das Ohmsche Gesetz unter Berücksichtigung der Richtung von *r*

3) $d\varphi = -I_{ges} \frac{R_{spez}}{2\pi h} \frac{1}{r} dr$

Ersetzen von $I_{ges}$ aus Gleichung 1 führt zu

4) $d\varphi = -\frac{\varphi_1}{R_{ges}} \frac{R_{spez}}{2\pi h} \frac{1}{r} dr$

Integration vom Inneren Radius bis zum Radius r führt zu

5) $\int_{\varphi_1}^{\varphi} d\varphi = -\frac{\varphi_1}{R_{ges}} \frac{R_{spez}}{2\pi h} \int_{r_1}^{r} \frac{1}{r} dr$

Bleibt $R_{ges}$ zu bestimmen: Dieser setzt sich als Reihenschaltung der Einzelwiderstände der Zylindermäntel zusammen:

6) $R_{ges} = \int_{r_1}^{r_2} dR = -\frac{R_{spez}}{2\pi rh} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr$

In Gleichung 5 einsetzen und kürzen führt zu

7) $\varphi - \varphi_1 = -\frac{\int_{r_1}^{r} \frac{1}{r} dr}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr} \varphi_1$

Berechnen der Integrale führt zu

8) $\varphi = 1 - \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$